Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Prova Específica em Matemática

aplicada às Ciências Sociais

Duração: 1h30min + 30min tolerância *PROVA MODELO*

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique a questão a que está a responder.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada questão.

A prova inclui um formulário.

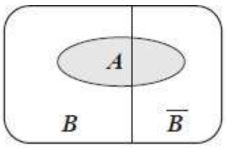
As cotações das questões encontram-se no final do enunciado da prova.

Em todas as questões apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

FORMULÁRIO

MODELOS DE PROBABILIDADE

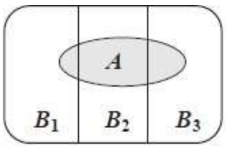
- Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

- Modelo normal

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$
$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Introdução à inferência estatística

- Teorema do limite central para a distribuição de amostragem de uma média

Recolhendo uma amostra de dimensão n (n > 30) de uma população com a característica (variável) X com valor médio μ ($\mu \in$ IR) e desvio padrão σ (σ > 0), a distribuição de amostragem da média dessa amostra $\bar{X}$ pode ser aproximada por uma distribuição normal com valor médio μ e desvio-padrão $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

- Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se conhece o desvio-padrão da variável

$$\left]\bar{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra
$\bar{x}$ – média amostral
σ – desvio-padrão da variável
z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio-padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\bar{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra
$\bar{x}$ – média amostral
s – desvio-padrão amostral
z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção *p*, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-|\hat{p})}{n}};\ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra
$\bar{x}$ – média amostral
σ – desvio-padrão da variável
z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de *z* para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. Considere o modelo de crescimento de uma população de animais dado pela expressão:

$$P(t) = \frac{210}{1+6e^{-0.5t}} \quad , t \geq 0,$$

onde ***t*** representa a unidade de tempo em semanas.

1.1. Calcule quantos animais existiam inicialmente.

1.2. Calcule quantos animais existirão ao fim de 21 dias.

1.3. Esboçando o gráfico desta função, descreva a evolução desta população ao longo do tempo.

2. Numa notícia publicada numa revista são apresentados resultados de um questionário feito a 1000 indivíduos. No gráfico da Figura 1 (incompleto) e da Figura 2 estão representados os resultados às questões: "Tem cartão de crédito?" E para os cidadãos com cartão de crédito "Quantos cartões de crédito tem?".

Figura 1 - Tem cartão de crédito?

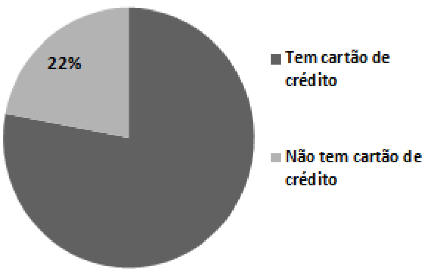
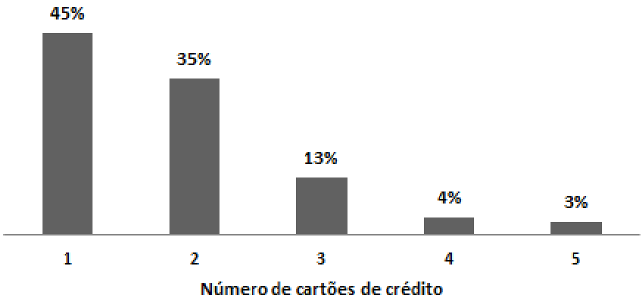


Figura 2 – Para os cidadão com cartão de crédito: Quantos cartões de crédito tem?



2.1. Determine a probabilidade de um cidadão, escolhido ao acaso, ter um ou mais cartões de crédito.

2.2. Justifique se são acontecimentos contrários os acontecimentos "ter cartão de crédito" e "não ter cartão de crédito".

2.3. Determine a probabilidade de um cidadão, escolhido ao acaso, ter cinco cartões de crédito.

2.4. Seja X: "número de cartões de crédito que um cidadão possui". Construa a tabela da distribuição de probabilidade da variável X.

3. Admita que a variável “altura das alunas do 1.º ano das licenciaturas da UTAD” segue uma distribuição aproximadamente normal, de média 170 centímetros (cm) e que se escolhe, ao acaso, uma aluna do 1.º ano da UTAD. Justifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

3.1. A probabilidade de a altura da aluna ser:

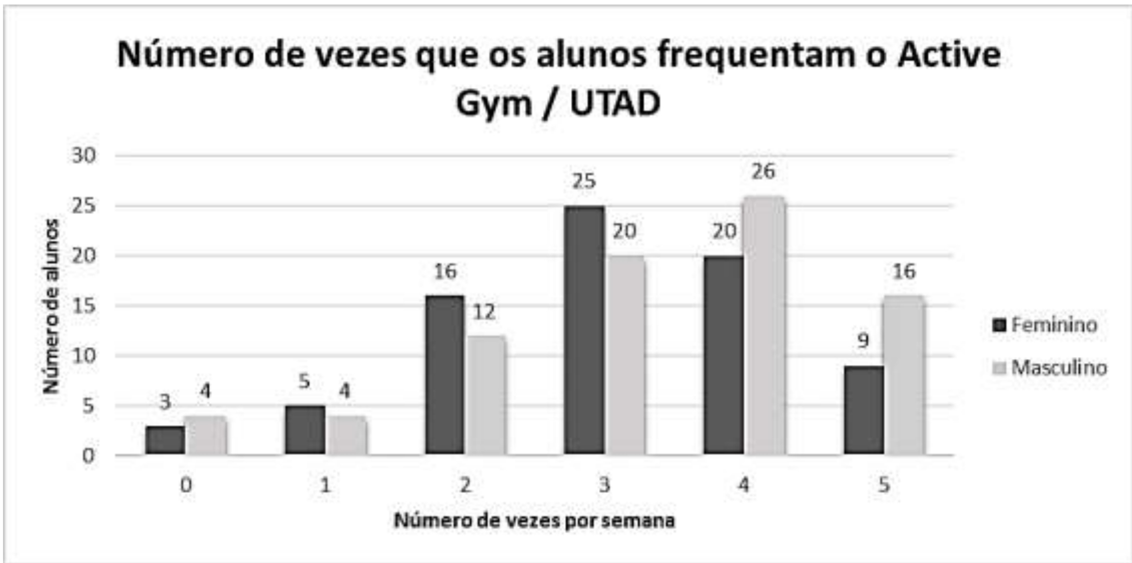
3.1.1. superior a 180 cm” é superior a 50%

3.1.2. inferior a 180 cm” é inferior a 50%.

3.1.3. superior a 155 cm é superior a 50%.

3.2. O acontecimento “a altura da aluna é superior a 180 cm” é o acontecimento mais provável.

4. De modo a conhecer melhor a atividade desportiva dos alunos da UTAD, observou-se, durante uma semana, o número de vezes que 160 alunos frequentaram o ginásio da universidade, o Active Gym/ UTAD. Os valores observados foram resumidos no gráfico seguinte:



4.1. Identifique a caraterística (variável) em estudo e classifique-a quanto ao tipo.

4.2. Com base nos dados fornecidos, e independentemente do género, copie esta tabela para a sua folha de exame e complete-a corretamente.

_________________, x_i	Frequência absoluta, n_i	Frequência relativa, fi = ni/n (%)	$n_i \times x_i$
0	7		0
1	9		9
2			
3			
4			
5	25		125
SOMAS	**160**		**134**

4.3. Qual é a percentagem de alunos (independentemente do género) que frequentam o ginásio duas vezes por semana ou menos?

4.4. Determine a moda, a mediana e a média da amostra para o número de vezes que os alunos (independentemente do género) frequentam o ginásio por semana.

4.5. Sabendo que desvio-padrão amostral é 1,298, construa um intervalo de confiança para a média do número de vezes que os alunos (independentemente do género) frequentam o ginásio por semana, usando o grau de confiança de 95%.

COTAÇÕES

Item																TOTAL
Cotação (em pontos)																
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**2.4**	**3.1.1**	**3.1.2**	**3.1.3**	**3.2**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**4.4**	**4.5.**	
15	15	20	10	10	15	15	10	10	10	20	10	10	10	10	10	**200**